HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Anu Puustinen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Omavastuun muutoksen vaikutus vahinkovakuutuksen hinnoittelussa

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Elokuu 2016	36 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työn tavoitteena on tuottaa yksinkertainen prosessi vahinkovakuutusten omavastuiden hinnoitteluun. Tutkitaan, kuinka omavastuun muutos vaikuttaa yhtiön vastuulle jäävän kokonaisvahinkomäärän suuruuteen ja tuotetaan kokonaisvahinkomäärän muutosta kuvaava kerroin.

Tutkielman alussa esitellään yleisesti kaksi erilaista omavastuujärjestelyä ja osoitetaan, että toinen niistä on vakuutuksenottajan kannalta aina parempi, mikäli vakuutusmaksu määräytyy vain yhtiön vastuulle jäävän kokonaisvahinkomäärän odotusarvosta. Lisäksi todetaan esimerkin avulla, että tilanne voi muuttua, jos vakuutusmaksussa otetaan huomioon vakuutuksen hoito- ja käsittelykuluja.

Omavastuun muutoksen vaikutukseen liittyvissä tarkasteluissa käytetään erään henkilöasiakkaiden vahinkovakuutusturvan vahinkoaineistoa ja esitetään menetelmä muutoskertoimen tuottamiseen suoraan aineistosta.

Analyyttisen tarkastelun pohjana käytetään oletusta, että kokonaisvahinkomäärä on yhdistetty Poisson-muuttuja ja selvitetään, mikä tunnettu jakauma sopisi parhaiten kuvaamaan yksittäisten vahinkojen suuruutta. Kun sopiva jakauma on löydetty, määritetään omavastuusta riippuvat vahinkojen suuruutta sekä vahinkojen lukumäärää kuvaavat jakaumat. Lopuksi tuotetaan omavastuun muutoksen vaikutusta kuvaava kerroin yhtiön vastuulle jäävien kokonaisvahinkomäärien odotusarvojen avulla.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Vahinkovakuutus, omavastuu, Panjerin menetelmä, yhdistetty Poisson-muuttuja

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Omavastuun muutoksen vaikutus vahinkovakuutuksen hinnoittelussa

Anu Puustinen

9. kesäkuuta 2016

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tämän tutkielman tavoitteena on tuottaa yksinkertainen prosessi vahinkovakuutusten omavastuiden hinnoitteluun. Tarkoitus on tutkia, kuinka omavastuun muutos vaikuttaa yhtiön vastuulle jäävään kokonaisvahinkomäärään. Halutaan tuottaa kerroin, joka kuvaa kuinka paljon vahinkomäärä muuttuu kun omavastuuta nostetaan tai lasketaan.

Hieman teoreettisempana johdantona luvussa 2 esittelen kaksi erilaista omavastuujärjestelyä ja tuloksen, joka kertoo toisen niistä olevan aina vakuutuksenottajan kannalta parempi, kun vakuutusmaksu määräytyy yhtiön vastuulle jäävän kokonaisvahinkomäärän odotusarvosta. Lisäksi osoitan esimerkin avulla, että tilanne voi muuttua, jos vakuutusmaksussa otetaan huomioon vakuutusten hoito- ja käsittelykuluja.

Tarkastelujen pohjana käytetään erään henkilöasiakkaiden vahinkovakuutusturvan vahinkodataa. Datassa on tietoa vahingoista usealta eri omavastuutasolta, ja luvussa 3 lasken kokonaisvahinkomäärän muutosta kuvaavan kertoimen suoraan tämän aineiston avulla. Kertoimien laskeminen suoraan empiirisestä vahinkojakaumasta on kuitenkin työlästä ja onnistuu ainoastaan omavastuutasoille, joista on saatavilla vahinkodataa.

Luvussa 4 esitän analyyttisen menetelmän yhtiön vastuulle jäävän vahinkomäärän odotusarvon määrittämiseksi eri omavastuutasoilla. Liikkeelle lähdetään oletuksesta, että kokonaisvahinkomäärä X on yhdistetty Poisson-muuttuja ja selvitetään, mikä analyyttinen jakauma sopisi parhaiten yksittäisten vahinkojen jakaumaksi.

Lopuksi luvussa 5 käydään läpi, kuinka prosessi tuottaa omavastuun vaikutusta kuvaavan kertoimen.

Työn on tilannut OP Vakuutus. Tässä tutkielmassa esitettyjen tarkastelujen pohjalta ja kuvaamalla tavalla, olen tehnyt yksinkertaisen laskurin, joka tuottaa omavastuun muutoksen vaikutusta kuvaavan kertoimen.

Haluan kiittää työtäni OP Vakuutuksessa ohjannutta Mira Kauppia sekä Tuomas Seppästä, jonka antaman aiheen pohjalta tutkielmani alkoi.

Luku 2

Omavastuut hinnoittelussa

Määritelmä 2.1. Olkoon X kokonaisvahinkomuuttuja eli satunnaismuuttuja, joka kuvaa kokonaisvahinkomäärää esimerkiksi yhden vuoden aikana sattuneista vahingoista.

$$X = Z_1 + \cdots + Z_K, \tag{2.2}$$

missä $Z_i, i = 1, \ldots, K$, ja K ovat myös satunnaismuuttujia. Z_i kuvaa i:nnen vahingon suuruutta ja K tarkasteluvuotena sattuneiden vahinkojen lukumäärää.

Vakuutusmaksun suuruus määräytyy yleensä odotusarvosta $\mathbb{E}(X)$, mikäli huomioon ei oteta korvauksien käsittelystä aiheutuneita kuluja vakuutusyhtiölle.

Vakuutussopimus voidaan laatia sellaiseksi, että yhtiö korvaa vain osan kokonaisvahinkomäärästä. Silloin kokonaisvahinko määrä X jaetaan vakuutuksenottajan ja vakuutusyhtiön kesken siten, että

$$X = X^{ov} + X^{yv},$$

missä X^{ov} on vakuutuksenottajan omalle vastuulle jäävä osuus ja X^{yv} vakuutusyhtiön vastuulle jäävä osuus kokonaisvahinkomäärästä. Vakuutuksenottajan vastuulle jäävää osuutta vahingoista kutsutaan *omavastuuksi* ja vakuutusmaksu määräytyy odotusarvosta $\mathbb{E}(X^{yv})$.

Omavastuujärjestelyn vuoksi yhtiö voi alentaa vakuutusmaksun hintaa useista syistä. Selvästikin yhtiön vastuulle jäävän kokonaisvahinkomäärän odotusarvo pienenee, ja pienten vahinkojen poistuessa yhtiön hallintokulut vähenevät. Lisäksi järjestely kannustaa huolellisuuteen ja vahinkojen välttämiseen, koska vakuutuksenottaja joutuu maksamaan itse osan vahingoista.

Seuraavaksi tarkastelen kahta erilaista omavastuujärjestelyä.

2.1 Vahinkokohtainen omavastuu

Yleisesti käytössä olevassa omavastuujärjestelyssä jokainen yksittäinen vahinko jaetaan vakuutuksenottajan ja vakuuttajan kesken. Vakuutussopimuksessa määritellään omavastuuraja $M > 0$, joka on suurin vakuutuksenottajan vastuulle jäävä yksittäisen vahingon suuruus. Tällöin yksittäisen vahinkon suuruus Z on

$$Z = Z^{ov} + Z^{yv},$$

missä vakuutuksen ottajan osuus yksittäisestä vahingosta on

$$Z^{ov} = \min(Z, M),$$

ja vakuutusyhtiön vastuulle jäävä osuus yksittäisestä vahingosta on

$$Z^{yv} = Z - Z^{ov}.$$

2.2 Omavastuuna osa kokonaisvahinkomäärästä

Omavastuurajaksi M voidaan määritellä myös osuus kokonaisvahinkomäärästä X. Tällöin vakuutuksenottajan osuus kokonaisvahinkomäärästä on

$$X^{ov} = \min(X, M)$$

ja

$$X^{yv} = \max(0, X - M).$$

Tarkastellaan, millaisen omavastuujärjestelyn hyöty eli *utiliteetti* olisi vakuutuksenottajan näkökulmasta suurin. Otetaan käyttöön utiliteettifunktio u, joka asettaa päätöksentekohetkellä vaihtoehdot paremmuusjärjestykseen. Odotusarvohypoteesin mukaan, omavastuujäjestelyllä, joka johtaa suurimpaan utiliteettifunktion odotusarvoon, on suurin hyöty.

Olkoon a_0 vakuutuksenottajan alkupääoma ja u vastaava utiliteettifunktio, joka oletetaan kasvavaksi ja konkaaviksi. Jos vakuutusmaksu P riippuu vain yhtiön vastuulle jäävän vahinkomäärän odotusarvosta, vakuutuksenottajan kannattaa valita omavastuuksi osa kokonaisvahinkomäärästä, kun tavoitteena on maksimoida utiliteetti.

Lause 2.3. *Olkoon X kokonaisvahinkomäärä ja Y yhtiön osuus kokonaisvahinkomäärästä. Olkoon $R : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, missä*

$$R(M) = \mathbb{E}(max(0, X - M)).$$

Siis $R(M)$ on vakuutusyhtiön riskimaksu omavastuurajalla M. Oletetaan vielä, että

$$0 \leq Y \leq X$$

ja että

$$\mathbb{E}(Y) = P < \mathbb{E}(X).$$

Silloin funktio R on jatkuva ja $R(M) = P$ jollekin $M \in (0, \infty)$. Lisäksi pätee

$$\mathbb{E}\left(u\left(a_0 - P - [X - X^{yv}]\right)\right) \geq \mathbb{E}(u(a_0 - P - [X - Y])).$$

Lauseen 2.3 todistusta varten esittelen seuraavan lemman.

Lemma 2.4. *Olkoon X_1 ja X_2 satunnaismuuttujia ja $\mathbb{E}(X_1) < \infty$ ja $\mathbb{E}(X_2) < \infty$. Oletetaan, että $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$. Olkoon F_i satunnaismuuttujan X_i kertymäfunktio, jossa $i = 1, 2$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{R}$, että*

$$\begin{cases} F_1(x) \leq F_2(x), \ \textit{jos}\, x < x_0, \\ F_1(x) \geq F_2(x), \ \textit{jos}\, x \geq x_0. \end{cases}$$

Olkoon $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksi funktio. Silloin

$$\mathbb{E}(h(X_1)) \leq \mathbb{E}(h(X_2)). \tag{2.5}$$

Lauseen 2.3 todistus. Todistetaan ensin, että R on jatkuva ja, että vaadittu omavastuuraja M on olemassa.
Olkoon $M > 0$ ja $\Delta > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|R(M+\Delta) - R(M)| &= |\mathbb{E}(\max(0, X - (M+\Delta)) - \max(0, X - M))| \\
&= \mathbb{E}(\max(0, X - M) - \max(0, X - (M+\Delta))) \\
&= \mathbb{E}(0\mathbf{1}(X \leq M)) + \mathbb{E}((X - M)\mathbf{1}(X \in (M, M+\Delta]) + \mathbb{E}(\Delta\mathbf{1}(X > M+\Delta)) \\
&= \mathbb{E}((X - M)\mathbf{1}(X \in (M, M+\Delta]) + \Delta\mathbb{P}(X > M+\Delta)) \\
&\leq \Delta\mathbb{P}(X > M).
\end{aligned}$$

Funktio R on siis jatkuva. Lisäksi vaadittu omavastuuraja M on olemassa, koska

$$R(M) \to \mathbb{E}(X), \text{ kun } M \to 0$$

ja

$$R(M) \to 0, \text{ kun } M \to \infty.$$

Seuraavaksi todistetaan että, kun omavastuuna on osa kokonaisvahinkomäärästä, järjestely on vakuutuksenottajan näkökulmasta optimaalisin. Valitaan lemman 2.4 mukaisesti $X_1 = X^{yv}$, $X_2 = Y$ ja $x_0 = M$. Olkoon F_1 ja F_2 omavastuujärjestelyjä vastaavat kertymäfunktion.

$$F_1(x) = \mathbb{P}(X - X^{yv} \leq x)$$

ja

$$F_2(x) = \mathbb{P}(X - Y \leq x).$$

Jos $x < M$,

$$F_1(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X - Y \leq x) = F_2(x).$$

Jos taas $x \geq M$,

$$F_1(x) = 1 \geq F_2(x).$$

Koska utiliteettifunktio u on konkaavi, on kuvaus $x \to -u(a_o - P - x)$, kun $x \in \mathbb{R}$, konveksi, ja siten lemman 2.4 nojalla pätee

$$\mathbb{E}(-u(a_o - P - (X - X^{yv}))) \leq \mathbb{E}(-u(a_o - P - (X - Y)))$$

ja edelleen

$$\mathbb{E}(u(a_o - P - (X - X^{yv}))) \geq \mathbb{E}(u(a_o - P - (X - Y))).$$

□

2.3 Vakuutusten hoitokulujen lisääminen vakuutusmaksuun

Käytännössä vakuutusmaksun suuruus ei voi määräytyä pelkästään vakuutusyhtiön vastuulle jäävän vahinkomäärän odotusarvosta. Vakuutusyhtiölle aiheutuu korvausten lisäksi myös vakuutusten hoito- ja käsittelykuluja, jotka on otettava huomioon vakuutusmaksussa. Tällöin vahinkokohtainen omavastuujärjestely voisi olla parempi. Kun omavastuun alittavia vahinkoja ei ilmoiteta, vakuutusyhtiö säästää korvausten käsittelykustannuksissa.

2.3.1 Vahinkojen lukumäärän huomioonottaminen vakuutusmaksussa

Olkoon Y vakuutusyhtiön osuus kokonaisvahinkomäärästä X. Tarkastellaan vaihtoehtoista maksua P, johon on lisätty vahinkomäärän odotusarvon lisäksi vahinkojen lukumäärän odotusarvosta riippuva osa. Vertaillaan kahta kohtien 2.1 ja 2.2 mukaista omavastuujärjestelyä.

Kun omavastuuna on osa kokonaisvahinkomäärästä,

$$Y_1 = (X - M_1)\mathbf{1}(X > M_1)$$

ja

$$P = \mathbb{E}(Y_1) + \alpha\mathbb{E}(K), \tag{2.6}$$

missä vakio $\alpha > 0$ ja K on vahinkojen lukumäärä.

Jos omavastuu on osa jokaisesta sattuneesta vahingosta Z,

$$Y_2 = \sum_{k=1}^{K}((Z_k - M_2)\mathbf{1}(Z_k > M_2))$$

ja

$$P = \mathbb{E}(Y_2) + \alpha\mathbb{P}(Z > M_2)\mathbb{E}(K). \tag{2.7}$$

Määrittelemällä näin oletetaan että, kun omavastuu on osa kokonaisvahinkomäärästä, vakuutuksenottaja ilmoittaa kaikki sattuneet vahingot yhtiöön. Kun omavastuu on vahinkokohtainen, on perusteltua olettaa, ettei vakuutuksenottaja ilmoita yhtiöön ollenkaan omavastuurajan alittavia vahinkoja. Tällöin yhtiön tarvitsee ottaa maksussa huomioon vain rajan M_2 ylittävien vahinkojen lukumäärän odotusarvo.

Mikäli P määräytyisi vain odotusarvosta $\mathbb{E}(Y)$, yhtälön (2.6) mukainen järjestely olisi lauseen 2.3 mukaisesti vakuutuksenottajalle parempi. On kuitenkin helppo huomata, että mikäli $\mathbb{P}(Z > M_2) < 1$, yhtälön (2.7) mukaisen järjestelyn vakuutusmaksu olisikin pienempi, kun omavastuiden M_1 ja M_2 suuruudet on asetettu niin, että $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_2)$.

2.3.2 Kokonaisvahinkomäärän varianssi osana vakuutusmaksua

Tarkastellaan vielä toista vaihtoehtoista järjestelyä, jossa vakuutusmaksu määräytyisi kokonaisvahinkomäärän odotusarvon lisäksi varianssista. Intuitiivisesti on järkevää ottaa vakuutusmaksussa huomioon myös, kuinka kaukana vahinkomäärän Y arvot ovat tyypillisesti sen odotusarvosta. Oletetaan nyt että P määräytyy ehdosta

$$P = \mathbb{E}(Y) + \beta \mathrm{Var}(Y),$$

missä vakio $\beta > 0$. Tällöin vakuutetun utiliteetti on

$$\mathbb{E}(u(a_0 - P - [X - Y])).$$

Tarkastellaan seuraavaksi kohtien 2.1 ja 2.2 mukaisten omavastuujärjestelyjen optimaalisuutta yksinkertaisen esimerkin avulla. Käydään esiksi läpi esimerkkiin tarvittava määritelmä ja kaksi lausetta.

Määritelmä 2.8. Olkoon vahinkojen lukumäärä K Poisson-jakautunut satunnaismuuttuja parametrilla λ. Kokonasvahinkomuuttujaa X kutsutaan yhdistetyksi Poisson-muuttujaksi parametrilla (λ, S), jos $K, Z_1, Z_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja muuttujien $Z_1, Z_2, \ldots$ kertymäfunktio on S.

Lause 2.9. *Olkoon X yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S) ja olkoon M_K muuttujan K momentit generoiva funktio ja c_Z muuttujan Z kumulantit generoiva funktio. Silloin kokonaisvahinkomuuttujan X momentit generoiva funktio määräytyy ehdosta*

$$M_X(s) = M_K(c_Z(s)), \quad \textit{kun } s \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Todistus. Koska $K, Z_1, Z_2, \ldots$ ovat riippumattomia,

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{sX} \mathbb{1}(K = k)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \mathbb{E}(e^{s(Z_1 + \cdots Z_k)}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k M_Z(s)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{k c_Z(s)} \\ &= M_K(c_Z(s)). \end{aligned}$$

□

Lause 2.11. *Olkoon X ydistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S). Silloin muuttujan X odotusarvo ja varianssi ovat*

$$\mu_X = \lambda a_1$$
$$\sigma_X^2 = \lambda a_2,$$

missä a_1 ja a_2 ovat vahingon suuruuden Z ensimmäinen ja toinen origomomentti.

Todistus. Lauseesta 2.9 seuraa, että

$$\begin{aligned} M_X(s) =& M_K(c_Z(s)) \\ =& e^{\lambda(e^{(c_Z(s))}-1)} \\ =& e^{\lambda(M_Z(s)-1)}. \end{aligned}$$

Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \mu_X =& M_X'(0) \\ =& \lambda M_Z'(0) e^{\lambda(M_Z(0)-1)} \\ =& \lambda M_Z'(0) \\ =& \lambda a_1 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 =& M_X''(0) - M_X'(0)^2 \\ =& \lambda^2 M_Z'(0)^2 e^{\lambda(M_Z(0)-1)} + \lambda M_Z''(0) e^{\lambda(M_Z(o)-1)} - \lambda^2 M_Z'(0)^2 \\ =& \lambda M_Z''(0) \\ =& \lambda a_2. \end{aligned}$$

$\square$

Esimerkki 2.12. Olkoon Y_1 ja Y_2 kuten aiemmin ja olkoon kokonaisvahinkomäärä X ydistetty Poisson-muuttuja parametrilla $(2, S)$, missä S on vahinkojen suuruuksien $Z_1, Z_2, \ldots$ kertymäfunktio. Vakuutusmaksu P määräytyy ehdosta

$$P = \mathbb{E}(Y) + \beta \mathrm{Var}(Y),$$

missä $\beta = 0,1$. Oletetaan, että vahingon suruuden Z jakauma on

$$\mathbb{P}(Z = 2) = 0,2, \; \mathbb{P}(Z = 4) = 0,3 \; \text{ ja } \; \mathbb{P}(Z = 6) = 0,5$$

eli sallitaan vain kolme eri vahingon suuruutta mahdolliseksi. Asetetaan vielä omavastuu $M_1 = 5$ ja tutkitaan, mikä omavastuun M_2 tulisi olla, jotta $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_2)$. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1) =& \mathbb{E}((X - M_1)\mathbf{1}(X > M_1)) \\ =& \mathbb{E}(X\mathbf{1}(X > M_1)) - M_1 P(X > M_1).\end{aligned}$$

Odotusarvon määrittämiseen tarvitaan menetelmä yhdistetyn muuttujan kertymäfunktion laskemiseksi. Seuraavaksi esittelen Panjerin menetelmän, jota voidaan käyttää, kun vahingon suuruus keskittyy äärelliseen pistejoukkoon.

2.3.3 Panjerin menetelmä

Olkoon X yhdistetty muuttuja. Lukumäärämuuttuja on K ja yksittäisten vahinkojen suuruudet $Z_1, Z_2, \ldots$, joilla on kertymäfunktio S. Algoritmissa oletetaan, että $p_k = P(K = k)$ toteuttaa rekursion

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \text{ kun } k = 1, 2, \ldots, \tag{2.13}$$

missä a, b ja p_0 ovat vakioita.
Oletetaan, että on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku r ja vakio $c > 0$, joille

$$\sum_{i=0}^{r} s_i = 1, \tag{2.14}$$

missä $s_i = P(Z = ic)$, kun $i = 0, 1, \ldots, r$. Muunnoksella $S(z) \longrightarrow S(cz)$ päästään tilanteeseen, jossa $c = 1$ ja tätä vastaavan yhdistetyn muuttujan kertymäfunktion G sekä alkuperäisen muuttujan kertymäfunktion F välillä vallitsee yhteys $G(z) = F(cz)$. Siksi oletetaan jatkossa yleisyyttä rajoittamatta, että $c = 1$. Merkitään

$$f_j = P(X = j), \text{ kun } j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Kun edellä esitetyt oletukset täyttyvät, todennäköisyyden f_j saadaan yhtälöistä

$$f_0 = \begin{cases} p_0, & \text{jos } s_0 = 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i s_0^i, & \text{jos } s_0 > 0 \end{cases}$$

ja

$$f_j = \frac{1}{1 - a s_0} \sum_{i=1}^{\min(j,r)} \left(a + \frac{ib}{j}\right) s_i f_{j-i}, \text{ kun } j = 1, 2, \ldots.$$

Näin ollen kertymäfunktio saadaan kaavasta

$$F(j) = \sum_{i=0}^{j} f_i. \tag{2.15}$$

Menetelmä antaa tarkan tiheysfunktion arvon kaikkialla ja sopii hyvin käytettäväksi esimerkissä, koska mahdollisia vahinkojen suuruuksia on vain kaksi.

Esimerkki 2.12 jatkuu Kokonaisvahinkomäärä X on diskreetti satunnaismuuttuja, joka saa vain ei-negatiivisia parillisia kokonaislukuarvoja. Lasketaan ensiksi odotusarvo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X\mathbf{1}(X>5)) &= \sum_{x=6}^{\infty} xP(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} xP(X=x) - \sum_{x=0}^{4} xP(X=x) \\
&= \mathbb{E}(X) - \sum_{x=0}^{4} xP(X=x).
\end{aligned}$$

Kokonaisvahinkomäärän X odotusarvo on lauseen 2.11 mukaan $\lambda\mathbb{E}(Z) = 9,2$. Todennäköisyyksien $P(X = x)$ laskemiseen käytetään Panjerin menetelmää. Tarkistetaan, että menetelmän oletukset täyttyvät.
Koska vahinkojen lukumäärä K on Poisson-jakautunut parametrilla 2, todennäköisyydet $p_k = P(K = k)$ toteuttavat rekursion

$$\begin{aligned}
p_k &= \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1} \\
\frac{2^k}{k!}e^{-2} &= \left(a + \frac{b}{k}\right) \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}e^{-2}.
\end{aligned}$$

Selvästi yhtälö toteutuu, kun $a = 0$ ja $b = 2$. Lisäksi, kun $r = 6$, pistetodennäköisyyksille $s_i = P(Z = i)$ pätee

$$\sum_{i=0}^{6} s_i = \sum_{i=0}^{6} P(Z=i) = 1.$$

Näin ollen kaikki tarvittavat oletukset täyttyvät. Koska $P(Z = 0) = 0$, todennäköisyys

$$\begin{aligned}
f_0 &= P(K=0) \\
&= e^{-2}
\end{aligned}$$

ja todennäköisyydet f_j, $j = 1, 2, \dots$, saadaan yhtälöstä

$$f_j = \sum_{i=1}^{\min(j,6)} \frac{2i}{j} s_i f_{j-i}.$$

Nyt voidaan laskea

$$\begin{aligned} P(X > 5) =& 1 - P(X \leq 5) \\ =& 1 - \sum_{i=0}^{5} f_i \\ \approx& 0,7185 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X\mathbf{1}(X > 5)) =& \mathbb{E}(X) - \sum_{x=0}^{4} xP(X = x) \\ \approx& 8,724. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_1) =& \mathbb{E}(X\mathbf{1}(X > 5)) - 5P(X > 5) \\ \approx& 5,11. \end{aligned}$$

Seuraavaksi selvitetään, mikä omavastuun M_2 tulisi olla, että $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_2)$. Koska selvästi vahinkokohtaisen omavastuun M_2 tulee olla pienempi kuin M_1, oletetaan että $2 < M_2 < 4$. Saadaan seuraava yhtälö

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_2) =& \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{K}(Z_k - M_2)\mathbf{1}(Z_k > M_2)\right) \\ =& \mathbb{E}(K)\left(\mathbb{E}(Z\mathbf{1}(Z > 2)) - M_2 P(Z > 2)\right). \end{aligned}$$

Lasketaan ensin odotusarvo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z\mathbf{1}(Z > 2)) =& \sum_{z>2}^{\infty} zP(Z = z) \\ =& 4P(Z = 4) + 6P(Z = 6) \\ =& 4,2. \end{aligned}$$

Koska selvästi $P(Z > 2) = 0,8$, saadaan

$$\mathbb{E}(Y_2) = 2(4,2 - 0,8M_2).$$

Koska omavastuun M_2 täytyy toteuttaa yhtälö $\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_2)$, saadaan

$$\begin{aligned} 5,11 =& 2(4,2 - 0,8M_2) \\ M_2 \approx& 2,06. \end{aligned}$$

Tarkistetaan vielä, että tämä on ainut omavastuu, joka toteuttaa yhtälön. Jos $M_2 = 2$, $\mathbb{E}(Y_1) \neq \mathbb{E}(Y_2)$, koska $\mathbb{P}(Z > 2) = \mathbb{P}(Z > 2,06)$. Jos taas $M_2 < 2$, $\mathbb{P}(Z > M_2) = 1$ ja

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z\mathbf{1}(Z > M_2)) =& \mathbb{E}(Z) \\ =& 4,6. \end{aligned}$$

Tällöin $M_2 = 2,05$, mikä on selvästi ristiriita.

Nyt ehdon mukaiset omavastuut on löydetty, joten lasketaan seuraavaksi $\mathrm{Var}(Y_1)$ ja $\mathrm{Var}(Y_2)$. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_1) =& \mathbb{E}(Y_1^2) - \mathbb{E}(Y_1)^2 \\ =& \mathbb{E}((X-5)^2\mathbf{1}(X > 5)^2) - \mathbb{E}(Y_1)^2 \\ =& \mathbb{E}((X^2 - 10X + 25)\mathbf{1}(X > 5)) - \mathbb{E}(Y_1)^2 \\ =& \mathbb{E}(X^2\mathbf{1}(X > 5)) - 10\mathbb{E}(X\mathbf{1}(X > 5)) + 25P(X > 5) - \mathbb{E}(Y_1)^2. \end{aligned}$$

Huomataan, että suurin osa yhtälöstä on jo laskettu. Ainoastaan odotusarvo $\mathbb{E}(X^2\mathbf{1}(X > 5))$ kaipaa hiukan enemmän tarkastelua.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2\mathbf{1}(X > 5)) =& \sum_{x=6}^{\infty} x^2 P(X = x) \\ =& \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(X = x) - \sum_{x=0}^{4} x^2 P(X = x) \\ =& \mathbb{E}(X^2) - \sum_{x=0}^{4} x^2 P(X = x). \end{aligned}$$

$\mathbb{E}(X^2)$ on kokonaisvahinkomäärän X toinen origomomentti. Momentin laskemiseksi määriätään satunnaismuuttujan X momentit generoiva funktio lauseen 2.9 mukaisesti.

$$\begin{aligned} M_X(s) =& \exp(2(M_Z(s) - 1)) \\ =& \exp(2(0,2e^{2s} + 0,3e^{4s} + 0,5e^{6s} - 1)) \end{aligned}$$

ja, koska

$$M''_X(0) = \mathbb{E}(X^2)$$

saadaan

$$\mathbb{E}(X^2) = 131,84.$$

Seuraavaksi käytetään Panjerin menetelmällä laskettuja kokonaisvahinkomäärän X tiheysfunktion arvoja ja lasketaan summa

$$\sum_{x=0}^{4} x^2 P(X = x) \approx 1,689$$

Näiden tulosten avulla voidaan laskea yhtion vastuulle jäävän vahinkomäärän Y_1 varianssi

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_1) =& \mathbb{E}(X^2\mathbf{1}(X > 5)) - 10\mathbb{E}(X\mathbf{1}(X > 5)) + 25P(X > 5) - \mathbb{E}(Y_1)^2 \\ \approx& 34,76.\end{aligned}$$

Seuraavaksi lasketaan yhtiön vastuulle jäävän vahinkomäärän Y_2 varianssi, kun omavastuuna on osa yksittäisestä vahingosta.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_2) =& \mathbb{E}(Y_2^2) - \mathbb{E}(Y_2)^2 \\ =& \mathbb{E}\left((K(Z - 2,06)\mathbf{1}(Z > 2,06))^2\right) - \mathbb{E}(Y_2)^2 \\ =& \mathbb{E}(K^2(Z - 2,06)^2\mathbf{1}(Z > 2,06)^2) \\ =& \mathbb{E}(K^2)\big(\mathbb{E}(Z^2\mathbf{1}(Z > 2,06)) - 4,12\mathbb{E}(Z\mathbf{1}(Z > 2,06)) + 2,06^2P(Z > 2,06)\big) - \mathbb{E}(Y_2)^2.\end{aligned}$$

Lasketaan ensin vahinkojen lukumäärämuuttujan K toinen origomomentti. Koska K on Poisson-jakautunut, momentit generoiva funktio on

$$M_K(s) = \exp(2(e^s - 1))$$

ja edelleen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(K^2) =& M''_K(0) \\ =& 6.\end{aligned}$$

Lasketaan vielä odotusarvo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^2\mathbf{1}(Z > 2,06)) =& \sum_{z=4}^{\infty} z^2 P(Z = z) \\ =& 4^2P(Z = 4) + 6^2P(Z = 6) \\ =& 22,8.\end{aligned}$$

Saatujen tulosten avulla lasketaan varianssi

$$\mathrm{Var}(Y_2) \approx 26,66.$$

Kun omavastuuna on osa kokonaisvahinkomäärästä, vakuutusmaksu on

$$\begin{aligned} P_1 =& \mathbb{E}(Y_1) + \beta \mathrm{Var}(Y_1) \\ =& 5,11 + 0,1 \cdot 34,76 \\ \approx& 8,6 \end{aligned}$$

ja, kun omavastuuna on osa yksittäisestä vahingosta

$$P_2 \approx 7,8.$$

Tarkastellaan seuraavaksi vakuutetun utiliteettia molemmissa tapauksissa. Olkoon $a_0 = 20$ ja utiliteettifunktio $u(v) = 1 - e^{-v}$. Tällöin

$$\mathbb{E}(u(a_0 - P_2 - X^{ov})) = \mathbb{E}(u(12,2 - X_2^{ov})),$$

missä X_2^{ov} vakuutuksenottajan omalle vastuulle jäävä osuus kokonaisvahinkomäärästä, kun omavastuu on vahinkokohtainen. Olkoon Z_k^{ov}, $k = 0, 1, 2, \dots, K$, vakuutetun omalle vastuulle jäävän yksittäisen vahingon suuruus. Tällöin satunnaismuuttujan Z_k^{ov} jakauma on $P(Z_k^{ov} = 2) = 0,2$ ja $P(Z_k^{ov} = 2,06) = 0,8$, kaikilla $k = 0, 1, \dots, K$. X_2^{ov} on siis myös yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla $(2, S^{ov})$, missä S^{ov} on vahinkojen suuruuksien Z^{ov} kertymäfunktio. Saadaan

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u(12,2 - X_2^{ov}) =& \mathbb{E}(1 - e^{-12,2} e^{X_2^{ov}}) \\ =& 1 - e^{-12,2} \mathbb{E}(e^{X_2^{ov}}). \end{aligned}$$

Lasketaan odotusarvo $\mathbb{E}(e^{X_2^{ov}})$ lauseen 2.9 mukaisesti momentit generoivan funktion avulla.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{X_2^{ov}}) =& \exp(2(M_{Z^{ov}}(1) - 1)) \\ =& \exp(0,4e^2 + 1,6e^{2,06} - 2) \\ . \end{aligned}$$

Näin ollen utiliteetin odotusarvoksi saadaan

$$\begin{aligned} 1 - e^{-12,2} \mathbb{E}(e^{X_2^{ov}}) =& 1 - \exp(0,4e^2 + 1,6e^{2,06} - 2 - 12,2) \\ \approx& 0,999995 \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi utiliteettifunktion odotusarvoa, kun omavastuuna on osa kokonaisvahinkomäärästä.

$$\mathbb{E}(u(a_0 - P_1 - [X - Y_1])) = \mathbb{E}(u(20 - 8,6 - X_1^{ov})),$$

missä X_1^{ov} on vakuutuksenottajan vastuulle jäävä osa kokonaisvahinkomäärästä, jonka jakauma määräytyy seuraavasti

$$\begin{aligned}
P(X_1^{ov} = 0) =& P(X = 0) \\
P(X_1^{ov} = 2) =& P(X = 2) \\
P(X_1^{ov} = 4) =& P(X = 4)
\end{aligned}$$

ja

$$P(X_1^{ov} = 5) = P(X > 4).$$

Utiliteettifunktion odotusarvoksi saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(u(11,4 - X_1^{ov})) =& 1 - e^{-11,4}\mathbb{E}(e^{X_1^{ov}}) \\
\approx& 0,9987.
\end{aligned}$$

Näin ollen vahinkokohtainen omavastuu johtaa suurempaan utiliteetin odotusarvoon. Kun vakuutusmaksussa otetaan huomioon yhtiön vastuulle jäävän vahinkomäärän varianssi, vahinkokohtainen omavastuu voisikin siis olla vakuutuksenottajan kannalta parempi.

Luku 3

Käytettävän aineiston tarkastelu

Tavoitteena on tuottaa yksinkertainen laskuri omavastuun muutoksen vaikutuksesta kokonaisvahinkomäärään. On siis arvioitava kokonaisvahinkomäärän suuruutta eri omavastuutasoilla.

Olkoon $X = Z_1, \ldots, Z_K$ määritelmän 2.1 mukaisesti. Jokaisesta vahingosta Z_i, $i = 1, \ldots, K$, vähennetään kiinteä ennalta määrätty omavastuu $M \in \mathbb{R}^+$. Kokonaisvahinkomäärän X arvioimiseksi tutkitaan erikseen vahinkojen Z_i suuruuksia ja lukumäärää.

3.1 Kertoimet empiirisestä jakaumasta

Tarkastellaan ensin omavastuun muutoksen vaikutusta kokonaisvahinkomäärään empiirisen jakauman avulla. Valitaan eräs henkilöasiakkaiden vakuutusturva, josta on saatavilla dataa usealta omavastuutasolta.
Ensiksi on otettava huomioon, ettei omavastuurajan M alittavia vahinkoja saateta ilmoittaa yhtiöön. Tästä johtuen vakuutuksia, joiden omavastuuraja on suurempi kuin hinnoiteltavana oleva omavastuu, ei voida käyttää laskettaessa kokonaisvahinkomäärän muutosta.
Tutkitaan ensin kuinka kokonaisvahinkomäärä muuttuu, kun siirrytään pienimmästä omavastuusta seuraavaan. Koska hinnoiteltavana on pienin, tässä tapauksessa 150 euron suuruinen, omavastuu, voidaan tarkasteluissa käyttää ainoastaan 150 euron omavastuullisten vakuutussopimusten vahingoista löytyvää dataa. Tehdään tarkasteltavasta datasta seuraava taulukko.

Taulukko 3.1: Kokonaisvahinkomäärän muutos

Omavastuu	N	X	n	x	X_{150}	X_{200}	Poistuneet vahingot
150	59245	19037608	4751	188676	19037608	16124232	2913376

Taulukossa

$$
\begin{aligned}
N =& 150 \text{ euron omavastuullisten vahinkojen lukumäärä}\\
X =& \text{ näiden vahinkojen yhtiön vastuulle jäävä kokonaismäärä}\\
n =& \text{ 200 euroa pienempien vahinkojen lukumäärä}\\
x =& \text{ yhtiön vastuulle jäävä 200 euroa pienempien vahinkojen kokonaismäärä}\\
X_{150} =& \text{ yhtiön vastuulle jäävä kokonaisvahinkomäärä, kun oletetaan omavastuun olevan 150 euroa}\\
X_{200} =& \text{ yhtiön vastuulle jäävä kokonaisvahinkomäärä, kun oletetaan omavstuun olevan 200 euroa.}
\end{aligned}
$$

Selvästi

$$X_{150} = X.$$

Luvun X_{200} saamiseksi tarvitaan hieman enemmän tarkasteluja. Alkuperäisestä kokonaisvahinkomäärästä X poistuvat ainakin uutta omavastuurajaa pienemmät vahingot x. Lisäksi, koska kaikkien vakuutussopimusten omavastuurajaa korotetaan, on kokonaisvahinkomäärästä myös poistettava kaikkien jäljelle jäävien vahinkojen omavastuun muutos. Saadaan

$$
\begin{aligned}
X_{200} =& X - x - (200 - 150)(N - n)\\
=& 19037608 - 188676 - 50 \cdot (59245 - 4751)\\
=& 16124232
\end{aligned}
$$

eli omavastuun noston johdosta poistuneet vahingot ovat

$$X_{150} - X_{200} = 2913376.$$

Kun tarkastellaan kuinka omavastuun muutoksen johdosta poistuneet vahingot vaikuttavat vahinkojen kokonaismäärään verrataan poistuneiden vahinkojen määrää alkuperäisen omavastuupisteen vahinkojen määrään. Tässä tapauksessa poistuneiden vahinkojen suhdeluvuksi saadaan

$$\begin{aligned}\frac{X_{150}-X_{200}}{X_{150}} =& \frac{2913376}{19037608} \\ =& 0,153.\end{aligned}$$

Näin ollen käytettävissä olevan aineiston perusteella kokonaisvahinkomäärä pienenee $15,3\%$ siirryttäessä 150 euron omavastuusta 200 euron omavastuuseen.

Tarkastellaan vielä, mikä suhdeluvun tulisi olla, jos siirrytään 200 euron omavastuusta 250 euron omavastuuseen. Kuten kappaleen 3.1 alussa todettiin, voidaan tarkasteluissa käyttää vahinkoaineistoa hinnoiteltavaa omavastuuta pienemmiltä omavastuutasoilta. Näin ollen, kun tarkastellaan vahinkomäärän muutosta siirryttäessä 200 euron omavastuusta 250 euron omavastuuseen, voidaan käyttää aineistoa 150 euron omavastuullisten vahinkojen lisäksi myös vahingoista, joiden omavastuu on 200 euroa. Saadaan seuraava taulukko

Taulukko 3.2:

Omavastuu	N	X	n	x	X_{200}	X_{250}	Poistuneet vahingot
150	59245	19037608	11383	690019	16124232	13561589	2562643
200	84	30929	4	119	30929	26810	4119
				Summa	16155161		2566762

Taulukossa

N = vahinkojen lukumäärä kyseessä olevalla omavastuulla
X = näiden vahinkojen yhtiön vastuulle jäävä kokonaismäärä
n = 250 euroa pienempien vahinkojen lukumäärä
x = yhtiön vastuulle jäävä 250 euroa pienempien vahinkojen kokonaismäärä
X_{200} = yhtiön vastuulle jäävä kokonaisvahinkomäärä, kun oletetaan omavastuun olevan 200 euroa
X_{250} = yhtiön vastuulle jäävä kokonaisvahinkomäärä, kun oletetaan omavstuun olevan 250 euroa.

Kun omavastuuna on 150 euroa, X_{200} saadaan suoraan taulukosta 3.1 ja

$$\begin{aligned}X_{250} =& X - x - (250-150)(N-n) \\ =& 13561589.\end{aligned}$$

Kun taas omavastuuna on 200 euroa,

$$X_{200} = X$$

ja

$$\begin{aligned} X_{250} =& X - x - (250 - 200)(N - n) \\ =& 26810. \end{aligned}$$

Suhdeluku saadaan vertaamalla summia

$$\frac{\sum \text{Poistuneet vahingot}}{\sum X_{200}} = 0,159.$$

Suoritetaan samanlainen tarkastelu jokaiselle datasta löytyvälle omavastuulle. Jos pienimmän omavastuun kerroin on 1, saadaan seuraavat kertoimet muille omavastuupisteille.

Taulukko 3.3: Kertoimet

Omavastuu	150	200	250	300	350	500	700
Kerroin	1	0,847	0,712	0,601	0,521	0,294	0,189

Ylläolevan taulukon mukaan, siirryttäessä esimerkiksi 150 euron omavastuusta 700 euroon, kokonaisvahinkomäärä alenee $81,1\%$.

Tämän tyyppiseen tarkasteluun liittyy myös ongelmia. Poistuneisiin vahinkoihin perustuvan suhdeluvun laskeminen on melko työlästä eikä kovinkaan luotettavaa aineiston ollessa pieni.

Luku 4

Kokonaisvahinkomäärän analyyttinen tarkastelu

Koska kokonaisvahinkomäärän muutoksen arvioiminen empiirisen jakauman avulla on varsin työlästä, on perusteltua koittaa löytää siihen sopiva analyyttinen menetelmä.

Olkoon X edelleen määritelmän 2.1 mukainen. Lisäksi oletetaan, että X on yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S) ja, että yhtiö käyttää vahinkokohtaista kiinteää omavastuuta M. Tavoitteena on määrittää kokonaisvahinkomäärän X odotusarvo, kun omavastuuta M muutetaan.

Lauseen 2.11 mukaan $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(K)\mathbb{E}(Z)$. Jos tarkastellaan yhtiön vastuulle jäävän vahinkomäärän X^{yv} odotusarvoa, tarvitaan vahinkojen lukumäärän K odotusarvo, kun otetaan huomioon vain omavastuurajan M ylittävät vahingot. Lisäksi on tutkittava, mikä on yhiön vastuulle jäävien yksittäisten vahinkojen odotusarvo.

Johdetaan yhtion vastuulle jäävälle vahinkomäärälle esitys, jossa otetaan huomioon vain rajan M ylittävät vahingot.

Olkoon $t_0 = 0$ ja $t_i = \inf\{k > t_{i-1} | Z_k > M\}$. Tällöin esimerkiksi t_1 on järjestyksessä ensimmäinen indeksi k, kun vahingon suuruus Z_k ylittää omavastuurajan M.
Merkitään lisäksi $r_i = t_i - t_{i-1}$ ja

$$Z_i^M = Z_{t_i} - M.$$

Olkoon vielä

$$K^M = \sup\{i | t_i \leq K\} = \#\{i \leq K | Z_i > M\}.$$

Tällöin K^M on omavastuurajan M ylittävien vahinkojen lukumäärä.

Lause 4.1. *Oletetaan, että $S(M) \in (0,1)$. Yhtiön vastuulle jäävä kokonaisvahinkomäärä on*

$$X^{yv} = Z_1^M + \cdots + Z_{K^M}^M$$

sekä korvattavien vahinkojen Z_i^M ehdollinen jakauma ehdolla $Z_i > M$ on

$$S^M(z) = \frac{S(M+z) - S(M)}{1 - S(M)}, \text{ kun } z \geq 0.$$

Todistus. Merkitään $p = 1 - S(M)$. Nyt selvästi todennäköisyys

$$\begin{aligned} P(t_1 = k) =& P(Z_1 \leq M, \ldots, Z_{k-1} \leq M, Z_k > M) \\ =& (1-p)^{k-1} p \end{aligned}$$

ja

$$P(t_1 < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} P(t_1 = k) = 1.$$

Samoin nähdään, että $P(t_i < \infty) = 1$, joten t_i on satunnaismuuttuja kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Myös $r_1, r_2, \ldots$ ovat satunnaismuuttujia. Selvästi $P(r_1 = k) = P(t_1 = k)$. Jos $t_1 = h$,

$$\begin{aligned} P(r_2 = k) =& P(t_2 - t_1 = k) \\ =& P(Z_{h+1} \leq M, \ldots, Z_{h+k-1} \leq M, Z_{h+k} > M) \\ =& (1-p)^{k-1} p \end{aligned}$$

ja

$$P(r_2 < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} P(r_2 = k) = 1.$$

Samoin nähtäisi myös, että r_i, kun $i \geq 3$, on satunnaismuuttuja. Lisäksi satunnaismuuttujat r_i, kaikilla $i = 1, 2, \ldots$, ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita.
Olkoon $z_1 \geq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} P(Z_1^M \leq z_1) &= \sum_{k_1=1}^{\infty} P(r_1 = k_1, Z_1^M \leq z_1) \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} P(Z_1 \leq M, \ldots, Z_{k_1-1} \leq M, Z_{k_1} \in (M, M+z_1]). \end{aligned}$$

Koska vahingon suuruudet ovat riippumattomia, kukin summattava voidaan esitää muodossa

$$\begin{aligned}&\frac{P(Z_{k_1}\in(M,M+z_1])}{P(Z_{k_1}>M)}P(Z_1\le M,\dots,Z_{k_1-1}\le M,Z_{k_1}>M)\\=&S^M(z_1)P(Z_1\le M,\dots,Z_{k_1-1}\le M,Z_{k_1}>M).\end{aligned}$$

Saadaan siis

$$P(Z_1^M\le z_1)=S^M(z_1)\sum_{k_1=1}^{\infty}P(r_1=k_1)=S^M(z_1). \tag{4.2}$$

Sama pätee myös muuttujille $Z_2^M, Z_3^M, \dots$.

Osoitetaan vielä, että X^{yv} on yhdistetty muuttuja. Olkoon $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ja $z_1,\dots,z_m\in\mathbb{R}$. Riittää, kun todistetaan seuraava väite tapauksessa $m\ge k$.

$$P(K^M=k,Z_1^M\le z_1,\dots,Z_m^M\le z_m)=P(K^M=k)S^M(z_1)\cdots S^M(z_m).$$

Yhtälön vasen puoli voidaan kirjoittaa muotoon

$$\sum_{h=k}^{\infty}P(K=h,r_1+\dots+r_k\le h,r_1+\dots+r_{k+1}>h,Z_1^M\le z_1,\dots,Z_m^M\le z_m).$$

Koska r- ja Z^M-muuttujat määräytyvät alkuperäisten Z-muuttujien avulla, vaatimus $K=h$ on riippumaton näistä. Ylläoleva voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\sum_{h=k}^{\infty}P(K=h)P(r_1+\dots+r_k\le h,r_1+\dots+r_{k+1}>h,Z_1^M\le z_1,\dots,Z_m^M\le z_m). \tag{4.3}$$

Olkoon $h_1,\dots,h_{m+1}$ sellaisia, että $h_1+\dots+h_k\le h$ ja $h_1+\dots+h_{k+1}>h$. Tällöin käyttämällä yhtälöä (4.3) saadaan

$$\begin{aligned}&P(r_1=h_1,\dots,r_{m+1}=h_{m+1},Z_1^M\le z_1,\dots,Z_m^M\le z_m)\\=&P(r_1=h_1,\dots,r_{m+1}=h_{m+1})S^M(z_1)\cdots S^M(z_m).\end{aligned}$$

Huomataan, että (4.4) voidaan esittää ylläolevan summana, joten saadaan (4.4) muotoon

$$\begin{aligned}&S^M(z_1)\cdots S^M(z_m)\sum_{h=k}^{\infty}P(K=h)P(r_1+\dots+r_k\le h,r_1+\dots+r_{k+1}>h)\\=&S^M(z_1)\cdots S^M(z_m)P(K^M=k).\end{aligned}$$

□

Seuraavaksi tutkitaan vahinkojen lukumäärän K muutosta, kun omavastuurajan M alittavat vahingot poistuvat. Olkoon K^M, kuten edellä, niiden vahinkojen lukumäärä, jotka ylittävät rajan M. Lisäksi merkitään edelleen $p = 1 - S(M)$, jossa S on satunnaismuuttujan Z kertymäfunktio.

Lause 4.4. *Satunnaismuuttujan K^M ehdollinen jakauma ehdolla $K = h$ on binomijakauma parametrilla (h, p) ja lisäksi $\mathbb{E}(K^M) = p\mathbb{E}(K)$.*

Todistus. Olkoon $h, k \in \mathbb{N}$ ja $k \leq h$. Silloin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K^M = k, K = h) =& \mathbb{P}(K = h, \text{tasan k vahingoista on suurempia kuin } M) \\ =& \mathbb{P}(K = h)\binom{h}{k}p^k(1-p)^{h-k}.\end{aligned}$$

Nyt ehdollisen todennäköisyyden määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K^M = k | K = h) =& \frac{\mathbb{P}(K = h)\binom{h}{k}p^k(1-p)^{h-k}}{\mathbb{P}(K = h)} \\ =& \binom{h}{k}p^k(1-p)^{h-k}.\end{aligned}$$

Todistetaan vielä toinen väite.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(K^M) =& \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(K^M = k) \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{h=k}^{\infty} \mathbb{P}(K = h)\binom{h}{k}p^k(1-p)^{h-k} \\ =& \sum_{h=0}^{\infty} \mathbb{P}(K = h) \sum_{k=0}^{h} k\binom{h}{k}p^k(1-p)^{h-k} \\ =& \sum_{h=0}^{\infty} \mathbb{P}(K = h)ph \\ =& p\mathbb{E}(K).\end{aligned}$$

□

Laskuria varten halutaan laskea yhtiön vastuulle jäävän kokonaisvahinkomäärän X odotusarvo, kun omavastuurajaa M muutetaan. Oletetaan, että yhtiöön ei ilmoiteta omavastuurajan alittavia vahinkoja, joten $Z_i > M$, kun $i = 1, 2, \ldots$. Jos $M = 0$, korvataan vahinko kokonaan ja vahingoilla Z_i on kertymäfunktio $S(z)$, kaikilla $i = 1, 2, \ldots$. Tällöin X on ydistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S) ja odotusarvolla

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \int_0^\infty z dS(z).$$

Jos M>0, omavastuurajan ylittävällä osalla Z^M on lauseen 4.1 mukaan kertymäfunktio

$$S^M(z) = \frac{S(M+z) - S(M)}{1 - S(M)},$$

kun $z \geq 0$. Tässä omavastuurajan M alittavia vahinkoja ei siis huomioida ollenkaan. Tällöin X^M on yhdistetty Poisson muuttuja parametrilla $(\lambda(1 - S(M)), S^M)$. Oletetaan, että kertymäfunktiolla S on olemassa tiheysfunktio S'. Näin ollen yhtiön vastuulle jäävän vahinkomäärän odotusarvo on

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^M) =& \lambda(1 - S(M)) \int_0^\infty z dS^M(z) \\
=& \lambda(1 - S(M)) \left(\frac{\int_0^\infty (z - M) dS(M+z)}{1 - S(M)} \right) \\
=& \lambda(1 - S(M)) \left(\frac{\int_M^\infty z dS(z)}{1 - S(M)} - M \right) \\
=& \lambda(\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{Z>M}) - M(1 - S(M))). \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Esimerkki 4.6. Olkoon X yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S) ja $M \in \mathbb{R}^+$ kiinteä vahinkokohtainen omavastuu. Oletetaan, että yksittäisen vahingon suuruus Z on Gamma-jakautunut parametrilla (α, β). Todettakoon, että Gamma-jakauma on paljon käytetty analyyttiinen jakauma vahingon suuruuden Z approksimointiin. Kun integroidaan osittain, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{Z>M}) =& \int_M^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} z^\alpha e^{-\frac{z}{\beta}} dz \\
=& \frac{\beta M^\alpha}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{M}{\beta}} + \alpha\beta \int_M^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} z^{\alpha-1} e^{-\frac{z}{\beta}} dz \\
=& \frac{\beta M^\alpha}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{M}{\beta}} + \alpha\beta(1 - S(M)).
\end{aligned}$$

Sijoittamalla ylläoleva yhtälöön (4.5) saadaan yhtiön vastuulle jäävien vahinkojen kokonaismäärän odotusarvo

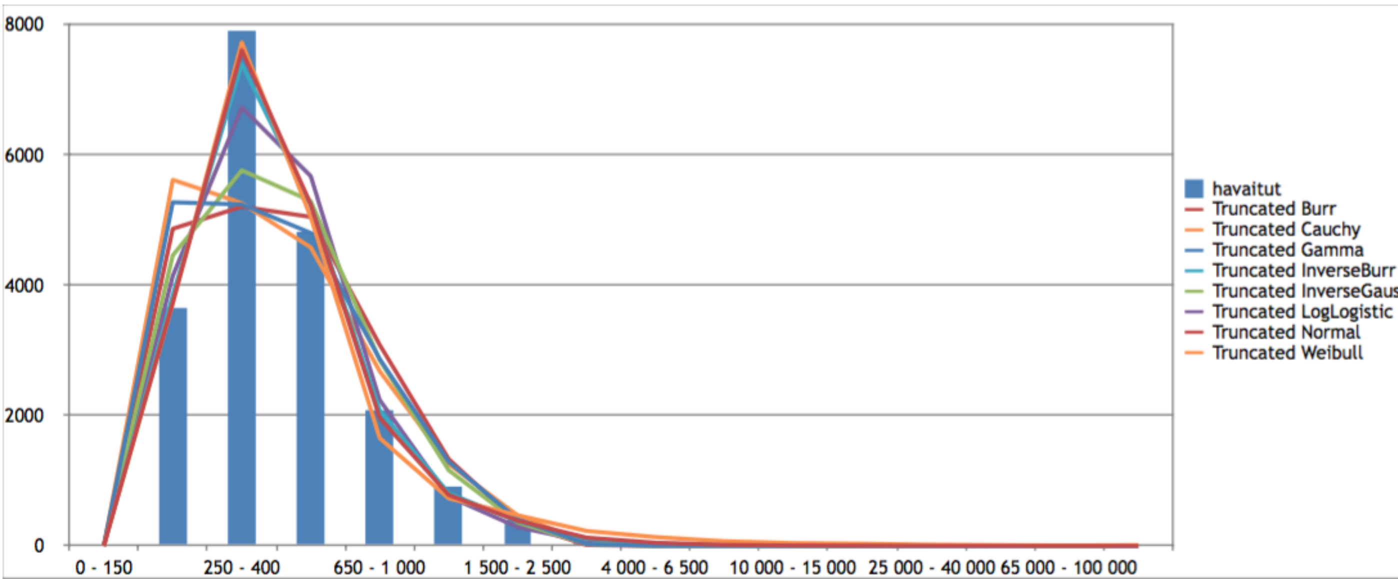
$$\mathbb{E}(X^M) = \lambda \left(\frac{\beta M^\alpha}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} e^{-\frac{M}{\beta}} + \alpha\beta(1 - S(M)) - M(1 - S(M)) \right). \qquad (4.7)$$

4.1 Vahinkojen suuruusjakauman valinta

Tutkitaan seuraavaksi, sopiiko Gamma-jakauma vahinkojen suuruuden Z jakaumaksi. Käytössä on edelleen erään henkilöasiakkaiden vahinkovakuutusturvan vahinkohistoria. Koska kaikki vahingot ovat omavastuullisia, tarkastellaan ainoastaan vahinkoja, joissa on pienin, tässä tapauksessa 150 euron, omavastuu. Sovitettavat jakaumat ovatkin siis katkaistuja siten, että tiheysfunktio on

$$f(z|Z > 150) = \frac{g(z)}{1 - F(150)},$$

missä $g(z) = f(z)$ kaikille $z > 150$ ja muutoin $g(x) = 0$. Kun niputetaan käytettävän aineiston vahingot ja katkaistaan sovitettavat jakaumat, saadaan seuraava kuvaaja. Jakaumat on katkaistu OP Vakuutuksessa käytössä olevalla ohjelmalla, joka antaa katkaistujen jakaumien parametrit.



Kuva 4.1: Katkaistut jakaumat

Kuvasta huomataan, että esimerkissä (4.7.) oletettu Gamma-jakauma ei kuvaakaan kovin hyvin vahinkojen Z suuruusjakaumaa. Kuvan perusteella parhaiten aineistoa kuvaa Burr-, Inverse Burr- ja Cauchy-jakauma. Tarkastellaan näitä kolmea jakaumaa.

Burr-jakauma:

Burr-jakauman tiheysfunktio parametreilla α, β, γ on

$$f(z) = \frac{\alpha\gamma(\frac{z}{\beta})^{\gamma}}{z(1+(\frac{z}{\beta})^{\gamma})^{\alpha+1}}$$

ja kertymäfunktio

$$F(z) = 1 - \left(\frac{1}{1+(\frac{z}{\beta})^{\gamma}}\right)^{\alpha}, \text{ kun } z > 0.$$

Lisäksi jaukaumalla on odotusarvo

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\beta\Gamma(\alpha - \frac{1}{\gamma})\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})}{\Gamma(\alpha)}, \text{ kun } \alpha\gamma > 1 \tag{4.8}$$

ja varianssi

$$\mathrm{Var}(Z) = \frac{\beta^2\Gamma(\alpha - \frac{2}{\gamma})\Gamma(1+\frac{2}{\gamma})}{\Gamma(\alpha)} - \left(\frac{\beta\Gamma(\alpha - \frac{1}{\gamma})\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})}{\Gamma(\alpha)}\right)^2, \text{ kun } \alpha\gamma > 2.$$

Burr-jakauman origomomentit a_n ovat äärellisiä vain, jos $\alpha\gamma > n$.

Inverse Burr -jakauma:

Inverse Burr -jakauman (tunnetaan myös Dagum-jakaumana) tiheysfunktio parametreilla τ, θ, γ on

$$f(z) = \frac{\tau\gamma(\frac{z}{\theta})^{\gamma\tau}}{z\left(1+(\frac{z}{\theta})^{\gamma}\right)^{\tau+1}}$$

ja kertymäfunktio

$$F(z) = \left(\frac{(\frac{z}{\theta})^{\gamma}}{1+(\frac{z}{\theta})^{\gamma}}\right)^{\tau}, \text{ kun } 0 < z < \infty.$$

Lisäksi odotusarvo ja varianssi on laskettavissa tietyin parametrirajoituksin. Kun $\gamma > 1$,

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\theta\Gamma(1-\frac{1}{\gamma})\Gamma(\tau+\frac{1}{\gamma})}{\Gamma(\tau)}$$

ja kun $\gamma > 2$,

$$\mathrm{Var}(Z) = \frac{\theta^2\Gamma(1-\frac{2}{\gamma})\Gamma(\tau+\frac{2}{\gamma})}{\Gamma(\tau)} - \left(\frac{\theta\Gamma(1-\frac{1}{\gamma})\Gamma(\tau+\frac{1}{\gamma})}{\Gamma(\tau)}\right)^2.$$

Inverse Burr -jakauman origomomentit a_n ovat äärellisiä vain, jos $\gamma > n$.

Cauchy-jakauma:

Cauchy-jakauman tiheysfunktio parametreilla α, β on

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\frac{\beta}{\beta^2+(z-\alpha)^2}, \text{ kun } -\infty < z < \infty.$$

ja kertymäfunktio

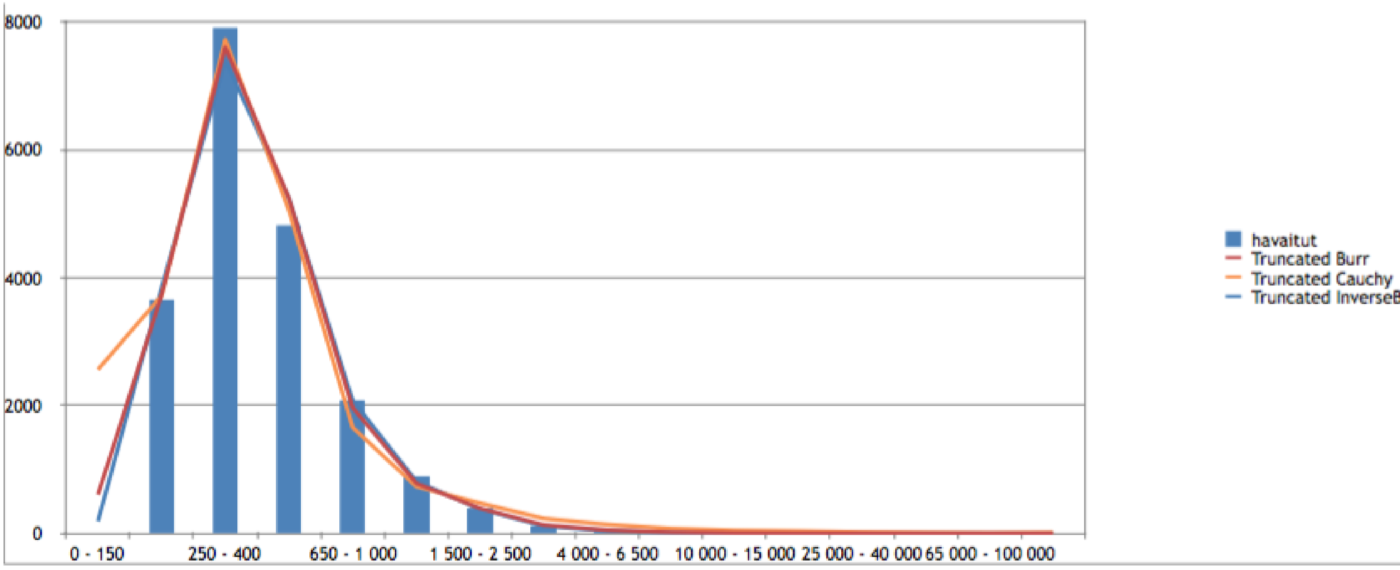
$$F(z) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2}.$$

Cauchy-jakaumalla ei ole odotusarvoa, varianssia eikä korkeampia momentteja.

Koska jakaumat on katakaistu, tarkistetaan vielä, että ne käyttäytyvät odotetulla tavalla välillä $[0, 150]$. Arvot saadaan seuraavasti

$$f[0, 150] = (F(150) - F(0)) \cdot \frac{\#[150, \infty]}{1 - F(150)},$$

missä F on kyseisen jakauman kertymäfunktio ja $\#[150, \infty]$ vahinkojen lukumäärä kyseisellä välillä.



Kuva 4.2: Valitut jakaumat

Yllä olevasta kuvasta nähdään, että välille $[0, 150]$ saadut arvot näyttävät uskottavilta. Luovutaan kuitenkin Cauchy-jakaumasta, koska sen momentteja ei voida määrittää ja se olisi tietenkin ongelmallista laskurin kannalta. Jäljelle jää siis Burr- ja Inverse Burr -jakauma. Kuvaajan perusteella molemmat jakaumat sopivat yhtä hyvin vahinkojen suuruusjakaumaksi.

4.1.1 Paksuhäntäisistä jakaumista

Paksuhäntäiset jakaumat sopivat usein kuvaamaan hyvin vahinkojen suuruusjakaumaa varsinkin, jos erityisen suuret vahingot ovat mahdollisia. Molemmat Burr- ja Inverse Burr -jakaumat ovat paksuhäntäisiä.

Määritelmä 4.9. Satunnaismuuttujan Z jakauma on paksuhäntäinen, jos

$$\lim_{z\to\infty} e^{\lambda z}\bar{F}(z) = \infty \quad \text{kaikilla } \lambda > 0,$$

missä $\bar{F}(z) = 1 - F(z)$ on jakauman häntäfunktio.

Esimerkki 4.10. Burr-jakauma on paksuhäntäinen, koska

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} \frac{e^{\lambda z}}{(1+(\frac{z}{\beta})^{\gamma})^{\alpha}} &= \lim_{z\to\infty} \frac{e^{\lambda z}}{(\frac{z}{\beta})^{\alpha\gamma}((\frac{\beta}{z})^{\gamma}+1)^{\alpha}} \\ &= \lim_{z\to\infty} \frac{e^{\lambda z}(\frac{\beta}{z})^{\alpha\gamma}}{((\frac{\beta}{z})^{\gamma}+1)^{\alpha}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Määritelmä 4.11. Kuvaus $f : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ on *säännöllisesti vaihteleva* indeksillä $\alpha \in \mathbb{R}$, jos kaikilla $z > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tz)}{f(t)} = z^{\alpha}.$$

Jos $\alpha = 0$, niin f on *hitaasti vaihteleva.* Nyt f on säännöllisesti vaihteleva, jos ja vain jos

$$f(z) = z^{\alpha} f_0(z), \quad \text{kun } z > 0,$$

missä f_0 on hitaasti vaihteleva.

Burr-jakauma on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha\gamma$, koska

$$\begin{aligned}\frac{\bar{F}(tz)}{\bar{F}(t)} &= \frac{(1+(\frac{t}{\beta})^{\gamma})^{\alpha}}{(1+(\frac{tz}{\beta})^{\gamma})^{\alpha}} \\ &= \frac{(\frac{t}{\beta})^{\alpha\gamma}((\frac{t}{\beta})^{-\gamma}+1)^{\alpha}}{(\frac{tz}{\beta})^{\alpha\gamma}((\frac{tz}{\beta})^{-\gamma}+1)^{\alpha}} \\ &= z^{-\alpha\gamma} \frac{((\frac{\beta}{t})^{\gamma}+1)^{\alpha}}{((\frac{\beta}{tz})^{\gamma}+1)^{\alpha}}\end{aligned}$$

ja

$$\lim_{t\to\infty} z^{-\alpha\gamma} \frac{((\frac{\beta}{t})^{\gamma}+1)^{\alpha}}{((\frac{\beta}{tz})^{\gamma}+1)^{\alpha}} = z^{-\alpha\gamma}.$$

Tällöin Burr-jakauman häntäfunktio $\bar{F}(z)$ muistuttaa potenssia $z^{-\alpha\gamma}$, kun z on suuri. Tarvittaessa jakauman alkupää ja arvioitu häntä voidaan yhdistää yhdeksi jakaumaksi. Tarkoituksena on kuitenkin määrittää omavastuurajaa M suurempien vahinkojen Z^M odotusarvo. Kuten luvussa 3 nähtiin, käytössä olevassa aineistossa eri omavastuut sijoittuivat välille $[150, 700]$. Omavastuurajat ovat siis melko pieniä, joten voidaan rajoittua tarkastelemaan ainoastaan jakauman alkupäätä.

Luku 5

Laskurin toiminta

Aikaisempien tarkastelujen perusteella oletetaan, että X on yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, F) ja vahinkojen suuruudet Z ovat Burr-jakautuneita parametrilla (α, β, γ). Parametrit ovat katkaistusta jakaumasta.

5.1 Vahinkojen lukumäärä

Vahinkojen lukumäärämuuttuja K on oletettu Poisson-jakautuneeksi parametrilla λ ja siksi $\mathbb{E}(K) = \lambda$. Yleensä saatavilla on aineistoa vain jo valmiiksi omavastuullisista vakuutusturvista. Tässäkin tapauksessa käytössä olevassa aineistossa omavastuuraja on 150.

Olkoon satunnaismuuttuja K^{150} niiden vahinkojen lukumäärä, jotka ylittävät rajan $M = 150$. Lauseen 4.5 mukaan omavastuurajan ylittävien vahinkojen lukumäärän K^M ehdollinen jakauma ehdolla $K = h$ on binomijakauma parametrilla (h, p) ja siten

$$\mathbb{E}(K^{150}) = p\mathbb{E}(K) = p\lambda, \tag{5.1}$$

missä $p = P(Z > 150)$. Koska käytössä on aineisto sattuneista vahingoista omavastuurajalla $M = 150$, voidaan estimoida odotusarvoa $\mathbb{E}(K^{150})$ aineiston vahinkojen lukumäärällä. Tällöin yhtälön (5.1) perusteella saadaan parametrille λ estimaatti

$$\lambda^* = \frac{\#K}{p}, \tag{5.2}$$

missä $\#K$ on vahinkojen lukumäärä käytössä olevassa aineistossa ja siis odotusarvon $\mathbb{E}(K^{150})$ estimaatti.

5.2 Kokonaisvahinkomäärän odotusarvo

Esimerkissä 4.7. vahinkojen odotusarvot pystyttiin määrittämään eksplisiittisesti suhteellisen helposti. Burr-jakauman tiheysfunktion monimutkaisuuden vuoksi, määritetään odotusarvoon tarvittava integraali

$$\int_M^\infty z dF(z)$$

numeerisesti. Käytetään integraalin approksimointiin niin sanottua keskipistesääntöä, jonka mukaan

$$\int_{a_1}^{a_N} f(x)dx \approx \sum_{n=1}^{N} \left((a_{n+1} - a_n) f\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2} \right) \right).$$

Kun $N \to \infty$,

$$\sum_{n=1}^{N} \left((a_{n+1} - a_n) f\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2} \right) \right) \longrightarrow \int_{a_1}^{a_N} f(x)dx.$$

Burr-jakauman odotusarvo voidaan määrittää tarkasti, kunhan parametrien α ja γ tulo on suurempaa kuin yksi. Näin ollen, kun $\alpha\gamma > 1$, kokonaisvahinkomäärän X^M odotusarvo on yhtälön (4.5) mukaisesti

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^M) =& \lambda \left(\int_M^\infty z dF(z) - M(1 - S(M)) \right) \\ =& \lambda \left(\left(\mathbb{E}(Z) - \int_0^M z dF(z) \right) - M(1 - S(M)) \right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Esimerkki 5.4. Olkoon X yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, F). Vahinkojen suuruudet ovat Burr-jakautuneita parametreilla $(0,46; 272,5; 4,52)$. Burr-jakaumalla on kohdan 4.1 mukaiset kertymäfunktio ja tiheysfunktio. Parametrit ovat pienimmän, 150 euron, omavastuun kohdalta katkaistusta jakaumasta. Lisäksi käytettävän aineiston 150 euron omavastuullisten vahinkojen lukumäärä on 57405. Lasketaan, mikä on kokonaisvahinkomäärän X odotusarvo omavastuurajalla 150 ja, kun omavastuu nostetaan 200 euroon.

Lasketaan ensin estimaatti parametrille λ. Saadaan yhtälön (5.2) mukaisesti

$$\begin{aligned} \lambda^* =& \frac{57405}{P(Z > 150)} \\ \approx& 59119. \end{aligned}$$

Koska $\alpha\gamma \approx 2,08$, voidaan lasketaan odotusarvo $\mathbb{E}(Z)$ yhtälön (4.8) mukaisesti.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) =& \frac{\beta\Gamma(\alpha - \frac{1}{\gamma})\Gamma(1 + \frac{1}{\gamma})}{\Gamma(\alpha)} \\ \approx& 491,76.\end{aligned}$$

Seuraavaksi lasketaan omavastuurajan $M = 150$ ylittävien vahinkojen kokonaismäärän X^{150} odotusarvo. Käyttämällä keskipistesääntöä saadaan

$$\int_0^{150} z dF(z) \approx 3,6$$

ja tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^{150}) \approx& \lambda^* \left(\left(\mathbb{E}(Z) - \int_0^{150} z dF(z) \right) - 150(1 - S(150) \right) \\ \approx& 59119((491,76 - 3,6) - 150(1 - 0,029)) \\ =& 20248848,69.\end{aligned}$$

Lasketaan samoin odotusarvo omavastuurajalla $M = 200$ ja saadaan

$$\mathbb{E}(X^{200}) \approx 17464934,98.$$

5.3 Kokonaisvahinkomäärän muutos

Kun X on yhdistetty Poisson-muuttuja parametrilla (λ, S), lauseen 2.11 mukaan $\mathbb{E}(X) = \lambda\mathbb{E}(Z)$. Kun otetaan käyttöön omavastuuraja M kokonaisvahinkomäärän X^M odotusarvo on yhtälön (4.5) mukainen. Tällöin kokonaisvahinkomäärän odotusarvon muutosta kuvaava kerroin k on

$$\begin{aligned}k =& \frac{\mathbb{E}(X^M)}{\mathbb{E}(X)} \\ =& \frac{\lambda(\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{Z>M}) - M(1 - S(M)))}{\lambda\mathbb{E}(Z)} \\ =& \frac{\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{Z>M}) - M(1 - S(M))}{\mathbb{E}(Z)}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Huomataan, että parametri λ supistuu ja kerroin k riippuu vain vahingon suuruuden Z jakaumasta.

Esimerkki 5.6. Olkoon yksittäisen vahingon suuruus Z kuten esimerkissä 5.4 ja vahinkojen lukumäärä K Poisson-jakautunut parametrilla λ. Lasketaan kuinka kokonaisvahinkomäärän X odotusarvo muuttuu, kun omavastuun suuruus nostetaan 150 eurosta 200 euroon.

Tässä tapauksessa omavastuun muutosta kuvaava kerroin on

$$k = \frac{\mathbb{E}(X^{200})}{\mathbb{E}(X^{150})}.$$

Käyttämällä esimerkkiä 5.4 saadaan

$$k = \frac{17464934,98}{20248848,69} \approx 0,863.$$

Näin ollen kokonaisvahinkomäärän X odotusarvo pienenee $13,7\%$, kun omavastuurajaa $M = 150$ muutetaan 200 euroon.

Kuten yllä olevassa esimerkissä, olettamalla X yhdistetyksi Poisson-muuttujaksi ja selvittämällä vahinkojen suuruuden Z ja lukumäärän K jakaumien parametrit, saadaan helposti laskettua kokonaisvahinkomäärän odotusarvon muutosta kuvaava kerroin millä tahansa omavastuupisteellä M.

Itse asiassa, kun oletetaan X yhdstetyksi Poisson-muuttujaksi, pelkkien kertoimien laskemiseen riittää ainoastaan yksittäisten vahinkojen jakauman selvittäminen, kuten huomattiin yhtälöstä (5.5).

Mikäli vakuutusmaksu määräytyisi pelkästään yhtiön vastuulle jäävän kokonaisvahinkomäärän odotusarvosta, esimerkiksi yllä olevan esimerkin (5.6) tapauksessa maksua voitaisi alentaa $13,7\%$, kun omavastuu nostetaan 150 eurosta 200 euroon. Tällainen tarkastelu ottaa huomioon vain omavastuun muutoksen johdosta poistuneiden vahinkojen sekä omavastuurajan ylittävien vahinkojen suuruuden.
Omavastuun muuttamiseen liittyy myös luvun 2 alussa mainittu huolellisuusvaikutus. Suurempi omavastuu kannustaa vakuutuksenottajaa huolellisuuteen. Mietitään hieman luvussa 3 laskettuja kertoimia. Kertoimien laskemiseen tarvittiin dataa usealta omavastuutasolta. Tällöin voidaan ajatella, että kertoimiin liittyy jo huolellisuusvaikutusta. Tässä tutkielmassa en käsittele tarkemmin huolellisuuden vaikutusta kokonaisvahinkomäärään. Todettakoon kuitenkin, että tarkastelemalla suoraan datasta laskettujen kertoimien eroa analyyttisestä jakaumasta laskettuihin, voitaisiin saada enemmän tietoa huolellisuuden vaikutuksesta kokonaisvahinkomäärään eri omavastuutasoilla.

Kirjallisuutta

[1] C.D. Daykin, T. Pentikäinen ja M. Pesonen: Practical Risk Theory for Actuaries, 1st edition, Chapman & Hall, 1994.

[2] Geoff Werner and Claudine Modlin: Basic Ratemaking, Casualty Actuarial Society, 4th version, 2010.

[3] Harri Nyrhinen:Tariffiteorian luentomoniste, Helsingin yliopisto, 2012.

[4] Harri Nyrhinen: Riskiteorian luentomoniste, Helsingin yliopisto, 2013.

[5] Dario Gasbarra: Todennäköisyysteorian luoentomoniste, Helsingin yliopisto, 2015